არიტმეტიკული ოპერაციები: გაყოფა

ეკატერინე კორძაძე
ანი გაბელაშვილი

გაყოფის კონცეპტუალური გაგების მნიშვნელობა

დაწყებით საფეხურზე მათემატიკის სწავლების ირგვლივ ჩატარებული კვლევებით დასტურდება, რომ მოსწავლეებს ყველაზე ხშირად არითმეტიკულ მოქმედებებს შორის უჭირთ გაყოფა, განსაკუთრებით დიდ რიცხვებზე გაყოფა. ამის მიზეზი, შესაძლოა, იყოს ის, რომ გაყოფა აბსტრაქტულ აზროვნებას საჭიროებს და მიმატებისა და გამოკლების ბაზისურ ცოდნას ეფუძნება. ამასთანავე, გაყოფა მოითხოვს არა მხოლოდ გამრავლების საპირისპირო ოპერაციის გააზრებას, არამედ ნაშთის კონცეფციის გაგებას, კარგ მეხსიერებას და მოქმედებების თანმიმდევრულად შესრულების უნარს. თუ მოსწავლეს ესმის გაყოფის არსი, ის შეძლებს მის გამოყენებას სხვადასხვა, რეალური ვითარებიდან მომდინარე ამოცანების ამოხსნისას. ამასთანავე, ნატურალური რიცხვების გაყოფის ღრმა და გააზრებული შესწავლა მოსწავლეს მიეხმარება წილადების, ათწილადების და მათზე მოქმედებების შესწავლაში. შესაბამისად, შეცდომებიც ნაკლები ექნება მათთან დაკავშირებულ ამოცანებში.

გაყოფის კონცეპტუალური გაგება გადამწყვეტ როლს ასრულებს მოსწავლის მათემატიკური აზროვნების რამდენიმე ასპექტის ჩამოყალიბებაში:

ოპერაციებს შორის კავშირის გააზრება:

- გაყოფის, როგორც **გამრავლების შებრუნებული მოქმედების** გაგება, რაც გულისხმობს იმას, რომ თუ $a \div b = q$, მაშინ $a = b \cdot q$, უმნიშვნელოვანესია და ეს ხელს უწყობს ლოგიკური აზროვნების განვითარებას. ამასთანავე, ეს აძლევს მოსწავლეს საშუალებას, გადაამოწმოს თავისი პასუხები და გააანალიზოს კავშირები მოქმედებებს შორის.

კრიტიკული და პრობლემის გადაჭრის უნარი:

- რეალური ვითარებიდან მომდინარე ტექსტური ამოცანების ამოხსნისას მოსწავლეს უნდა შეეძლოს განსაზღვროს, თუ რომელი არითმეტიკული მოქმედება (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა) შეესაბამება მოცემულ კონტექსტს. თუ მოსწავლე იაზრებს გაყოფას როგორც თანაბრად განაწილებას ან ჯგუფებად დაყოფას, ის სწორ არჩევანს გააკეთებს ამოცანის ამოხსნისას.

მაღალი სააზროვნო უნარების განვითარება:

- ○ გაყოფის ცოდნა აუცილებელია რაციონალური რიცხვების (წილადები, ათწილადები) შესასწავლად, სადაც გაყოფის ცნება ფართოვდება. მოსწავლე ხედავს, როგორ ხდება ცნების მოცულობის გაზრდა, როგორ ვითარდება ოპერაცია რაციონალურ რიცხვებზე.

მოდელირების უნარი (ვიზუალური წარმოდგენები):

- ○ გაყოფის დემონსტრირება კონკრეტული მოდელებით (მაგალითად, საგნებით, ნახატებით, დიაგრამებით) ავითარებს **ვიზუალურ და სივრცულ აზროვნებას** მათემატიკაში. მანიპულატივების გამოყენება მოსწავლეს ეხმარება იმაში, რომ აბსტრაქტული ცნებები კონკრეტულ გამოცდილებას დაუკავშიროს.

მსჯელობისა და დასაბუთების უნარი:

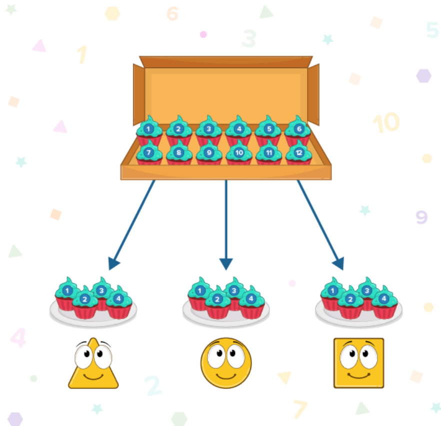
- ○ კონცეპტუალური გაგება მოსწავლეს საშუალებას აძლევს, არა მხოლოდ მიიღოს პასუხი, არამედ **ახსნას, თუ რატომ არის ეს პასუხი სწორი**. მაგალითად, რატომ უნდა იყოს ნაშთი გამყოფზე ნაკლები.

თუ შევაჯამებთ, გაყოფის კონცეპტუალური გაგება სცილდება უბრალო გამოთვლის უნარს. ის არის საფუძველი:

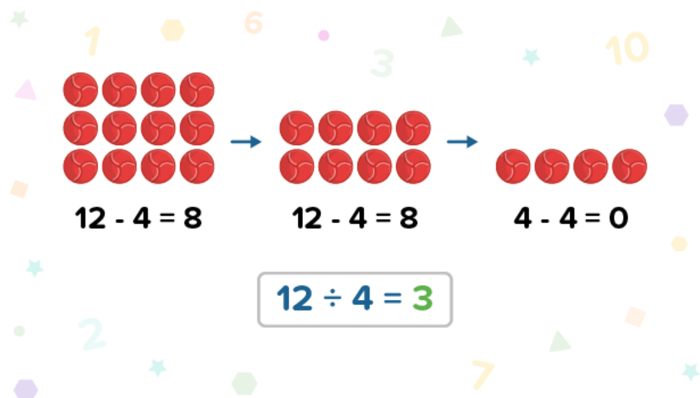
- ○ მათემატიკური ცნებების ღრმა გააზრებისა.
- ○ მოქმედებებს შორის ლოგიკური კავშირების დამყარებისა.
- ○ რეალური სამყაროს პრობლემების გადაჭრის უნარის განვითარებისა.
- ○ მათემატიკის მომდევნო, უფრო რთული თემების (წილადები, ალგებრა) წარმატებით დაუფლებისთვის.

გაყოფა შეიძლება განიხილებოდეს ორგვარად:

- თანაბარი დაჯგუფება (Partitive Division): როდესაც ცნობილია საერთო რაოდენობა და ჯგუფების რაოდენობა — უნდა განისაზღვროს, რამდენი ერთეული მოხვდება თითოეულ ჯგუფში.



• განმეორებითი გამოკლება (Measurement Division): როდესაც ცნობილია საერთო რაოდენობა და თითოეულ ჯგუფში ერთეულთა რაოდენობა — უნდა განისაზღვროს, რამდენი ასეთი ჯგუფი შეიქმნება.



ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვით, გაყოფის სწავლება იწყება III კლასში, როდესაც მოსწავლე უკვე ფლობს გამრავლების ძირითად ფაქტებს. ამ ეტაპზე ძირითადი მიზანია გაყოფის როგორც თანაბარი განაწილების გააზრება. IV კლასში კი მიმდინარეობს გაყოფის გამყარება, ალგორითმის გაცნობა და მისი გამოყენება პრაქტიკულ ამოცანებში.

საგნობრივი შედეგები ეროვნული სასწავლო გეგმის მიხედვთ მოიცავს:

- გაყოფისა და გამრავლების ურთიერთშებრუნებულობის გააზრებას;
- გაყოფის მოდელირებას კონკრეტულ სიტუაციებში;
- ზეპირად მარტივი გაყოფის შესრულებას;

- უცნობი კომპონენტის პოვნას ტოლობებში, რომლებიც მოიცავს გაყოფას.

გაყოფის სწავლება უნდა მიმდინარეობდეს თანმიმდევრულად — კონკრეტულიდან აბსტრაქტულისკენ. მასწავლებელმა უნდა უზრუნველყოს, რომ მოსწავლემ ჯერ გაიგოს გაყოფის მნიშვნელობა ხელშესახები და ვიზუალური მოდელებით, სანამ გადავა მათემატიკურ ჩანაწერებზე.

მასწავლებლის ძირითადი ამოცანებია:

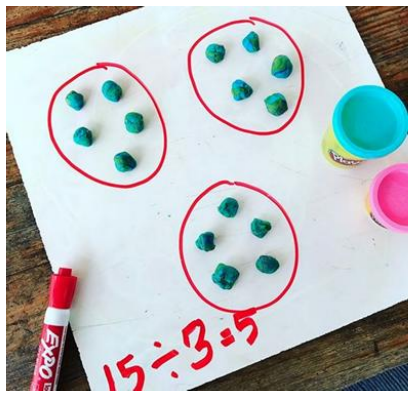
1. გააცნოს გაყოფა როგორც თანაბარი განაწილების პროცესი (მაგ. 'გვაქვს 12 ვაშლი და 4 ბავშვი — რამდენი ერგება თითოეულს?');
2. აჩვენოს კავშირი გამრავლებასთან ('თუ 3×4=12, მაშინ 12÷4=3');
3. გამოიყენოს მანიპულატივები და რეალური ობიექტები (ჟეტონები, კუბები, ფანქრები);
4. გადაიყვანოს მოსწავლე ვიზუალურ მოდელებზე (ნახატები, დიაგრამები);
5. საბოლოოდ იმუშაოს რიცხვით ჩანაწერებზე და ზეპირ გაყოფაზე.

გაყოფის სწავლებისას ეფექტურია შემდეგი ტიპის აქტივობები:

• აქტივობა 1 – „გავანაწილოთ თანაბრად“: მოსწავლეები იყენებენ ფერად კუბებს ან ჟეტონებს და თანაბრად ანაწილებენ მათ ჯგუფებად. მასწავლებელი აყალიბებს დასკვნას – რამდენი მოხვდა თითოეულ ჯგუფში.
• აქტივობა 2 – „ნახტომები რიცხვით ღერძზე“: მოსწავლეები ხედავენ, რომ განმეორებითი გამოკლება ფაქტობრივად წარმოადგენს გაყოფას. ეს მეთოდი ეხმარება მათ გამრავლებისა და გაყოფის ურთიერთკავშირში გარკვევაში.
• აქტივობა 3 – „იპოვე რიცხვების ოჯახი“: 3, 4, 12 → 3×4=12, 12÷4=3, 12÷3=4. ეს ამყარებს ოპერაციებს შორის შებრუნებულობას.
• აქტივობა 4 – „გაყოფა ყოველდღიურ ცხოვრებაში“: ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია რეალურ სიტუაციებთან (მაგ., „რამდენი ფურცელი ეყოფა თითოეულ ჯგუფს?“).

გაყოფის კონცეპტუალური გაგება გაცილებით ღრმად იყალიბება მაშინ, როცა მოსწავლე თავად მონაწილეობს აქტიურ, ხელშესახებ მოქმედებებში. ამიტომ, გაყოფის სწავლებისას განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ისეთ თამაშებს, რომლებიც საშუალებას აძლევს ბავშვს, თავად „გააცოცხლოს“ მათემატიკური იდეა — თანაბარი განაწილება, განმეორებითი გამოკლება და გამრავლებასთან კავშირი.

პირველი აქტივობა, რომელსაც მასწავლებელი იყენებს, ხშირად არის **„გავანაწილოთ თანაბრად“**. მოსწავლეები იღებენ გარკვეულ რაოდენობის საგნებს — მაგალითად, ოც ფერად ჟეტონს — და მასწავლებელი სთხოვს, ოთხ თანაბარ ჯგუფად გადაანაწილონ ისინი. ბავშვები იწყებენ ფერადი ნივთების გადანაწილებას, ზოგჯერ ოდნავ არათანაბრადაც, მაგრამ სწორედ ამ პროცესში ხედავენ, რას ნიშნავს „თანაბარი“. მასწავლებელი მათ ეხმარება დაინახონ, რომ თითოეულ ჯგუფში ხუთი ჟეტონი აღმოჩნდა და ახმოვანებს მათემატიკურ ენას: *ოცი გაყოფილი ოთხზე უდრის ხუთს (20 ÷ 4 = 5).* ამ მარტივი მოქმედებით მოსწავლე უშუალოდ უკავშირებს მათემატიკურ ჩანაწერს რეალურ გამოცდილებას.



მეორე აქტივობა — **„გაყოფის ბარათები“** — ემყარება თამაშის ფორმატს. მასწავლებელი წინასწარ ამზადებს ბარათებს, რომელთა ნახევარზე გაყოფის მაგალითებია დაწერილი (მაგალითად, *12 ÷ 3 = ?*), ხოლო დანარჩენზე — შესაბამისი პასუხები (*4*). ბარათები ეწყობა მაგიდაზე შერეულად, ხოლო მოსწავლეები ეძებენ წყვილებს. როდესაც იპოვიან სწორ შესაბამისობას, ხმამაღლა კითხულობენ: *12 ÷ 3 = 4, რადგან 3 × 4 = 12.* ასეთი აქტივობა არა მხოლოდ ახალისებს კლასს, არამედ აძლიერებს გამრავლებისა და გაყოფის ურთიერთშებრუნებულობის გაგებას.

მესამე თამაშში — **„სასუსნავის გამანაწილებლები“** — გაყოფა რეალურ ცხოვრებაში ცოცხლდება. მასწავლებელი ამბობს, რომ აქვთ თხუთმეტი კანფეტი და ხუთი მეგობარი, და ეკითხება მოსწავლეებს, რამდენი უნდა მიიღოს თითოეულმა. ბავშვები ანაწილებენ კანფეტებს და ერთმანეთს ამოწმებენ, თან მსჯელობენ, დარჩა თუ არა რამე. ამ პროცესში ისინი ხედავენ, რომ ყველა იღებს სამ- სამ კანფეტს, რაც ასახავს მათემატიკურ ფაქტს *15 ÷ 5 = 3.* მსგავსი ამოცანები აჩვენებს, რომ გაყოფა არა მხოლოდ წიგნში არსებული ოპერაციაა, არამედ ყოველდღიურ ცხოვრებაში გამოყენებადი უნარია.

შემდეგი აქტივობაა **„გაყოფის რბოლა“**, რომელიც ენერგიულ და მოტივირებულ ატმოსფეროს ქმნის. დაფაზე ან პროექტორზე ჩნდება რამდენიმე მაგალითი (მაგალითად, *24 ÷ 6*, *16 ÷ 4*, *18 ÷ 3*), ხოლო ორი მოსწავლე გამოდის წინ და ცდილობს რაც შეიძლება სწრაფად უპასუხოს. ყოველი სწორი პასუხი გუნდს ერთ ქულას მატებს. ეს თამაში ასწავლის მოსწავლეებს სწრაფ აზროვნებას და ამავდროულად ამყარებს ზეპირი გაყოფის ფაქტებს.

ბოლოს, აქტივობა **„გაყოფის ისტორიები“** აერთიანებს მათემატიკასა და შემოქმედებითობას. მოსწავლეები იგონებენ საკუთარ სიტუაციებს — მაგალითად: „მქონდა თორმეტი სტიკერი და გადავწყვიტე, თანაბრად გამენაწილებინა ისინი ამი მეგობრისთვის“ შემდეგ ისინი ხატავენ თავიანთ ისტორიას და ამატებენ შესაბამის მათემატიკურ ჩანაწერს *12 ÷ 3 = 4*. კლასში თითოეული ბავშვი კითხულობს თავის ამბავს, რაც ხელს უწყობს მათემატიკური ენის განვითარებასა და თვითგამოხატვას.

გავრცელებული შეცდომები გაყოფისას და კორექციის სტრატეგიები

1. შეცდომა: გამრავლების ფაქტების არასაკმარისი ცოდნა

ეს არის ძირითადი პრობლემა. თუ მოსწავლემ არ იცის, რომ 4×5=20, ის ვერ შეძლებს 20÷4-ის სწორად გამოთვლას.

შეცდომის არსი	როგორ ვლინდება	კორექციის სტრატეგია
გაყოფა-გამრავლების კავშირის რღვევა	მოსწავლე იყენებს დათვლის მეთოდს ან უბრალოდ წერს არასწორ რიცხვს.	**რიცხვების ოჯახის ბარათები:** მუდმივად გამოიყენეთ **"რიცხვების ოჯახი"** (მაგ., 3, 7, 21), რათა მოსწავლემ დაინახოს, რომ გაყოფა არის გამრავლების „უკანდაბრუნება“.
		ვიზუალური დახმარება: გამოიყენეთ **მასივის მოდელი** (მართკუთხედის სახით დახატვა), სადაც აშკარად ჩანს მწკრივებისა და სვეტების კავშირი საერთო რაოდენობასთან.

2. შეცდომა: გაყოფის მოდელების აღრევა (კონცეპტუალური შეცდომა)

ეს ხდება მაშინ, როდესაც მოსწავლეს არ ესმის, სჭირდება თუ არა **ჯგუფების რაოდენობის** პოვნა, თუ **თითოეულ ჯგუფში მოხვედრილი რაოდენობის**.

შეცდომის არსი	როგორ ვლინდება	კორექციის სტრატეგია
სიტუაციური ამოცანის არასწორად ინტერპრეტაცია	მოსწავლეს უჭირს გადაწყვიტოს, რომელი რიცხვია გამყოფი და რომელი განაყოფი, როდესაც ამოცანა სიტყვიერია.	**კითხვების ანალიზი:** მოსწავლეებს ასწავლეთ საკვანძო სიტყვების გამოყოფა: „**რამდენს მიიღებს თითოეული**“ (დანაწილება) და „**რამდენი ჯგუფი შეიქმნება**“ (განმეორებითი გამოკლება). **მანიპულატივების სავალდებულო გამოყენება:** ნებისმიერი სიტუაციური ამოცანის ამოხსნა დაიწყეთ **ფიზიკური დანაწილებით** (ჟეტონებით), რათა მოსწავლემ ხელშესახებად იგრძნოს პროცესი.

3. შეცდომა: ნაშთის არასწორი ინტერპრეტაცია

მოსწავლე ხშირად ნაშთს უყურებს როგორც „რჩენილ ციფრს“ და არა როგორც **დარჩენილ რაოდენობას**, რომელსაც აქვს კონტექსტური მნიშვნელობა.

შეცდომის არსი	როგორ ვლინდება	კორექციის სტრატეგია
ნაშთიანი გაყოფის შედეგის არასწორად გამოყენება	ამოცანაში, რომელიც საჭიროებს პასუხის ზემოთ დამრგვალებას, მოსწავლე პასუხად წერს მხოლოდ განაყოფს.	**რატომ დაგვრჩა?** დასვით კითხვა: **„რა არის ეს ნაშთი რეალურ სამყაროში?“** თუ 17 მოსწავლეს 4-ადგილიანი მანქანებით ვსვამთ, ნაშთი 1 არის „ერთი დარჩენილი მოსწავლე“, რომელსაც ცალკე მანქანა სჭირდება. **კონტრასტული ამოცანები:** მიეცით მოსწავლეებს ერთი და იგივე რიცხვებით შედგენილი ორი ამოცანა, სადაც ერთ შემთხვევაში ნაშთი იგნორირებულია, მეორეში კი საჭიროა დამრგვალება.

4. შეცდომა: გაყოფა ნულით

დაწყებით საფეხურზე ეს საკითხი აუცილებლად უნდა გაირკვეს, რათა თავიდან იქნას აცილებული კონცეპტუალური გაუგებრობები.

- **თეორიული საფუძველი:** მოსწავლეს უნდა ესმოდეს, რომ გაყოფა ნულზე **შეუძლებელია**.
- **ახსნის მეთოდი:** დაუკავშირეთ გამრავლებას. თუ 5÷0=x, მაშინ უნდა გვქონდეს x×0=5. ეს კი შეუძლებელია, რადგან ნებისმიერი რიცხვის ნულზე

გამრავლება ნულს იძლევა. **„ნულზე გაყოფა შეუძლებელია, რადგან ვერ შევქმნით ნულოვანი ზომის ჯგუფებს.“**

- **ნულის გაყოფა რიცხვზე:** (0÷5=0). „თუ გაქვს 0 კანფეტი და უნდა გაუნაწილო 5 ბავშვს, თითოეულს 0 კანფეტი ერგება.“ ეს მარტივად გასაგებია.

ეს ანალიზი საშუალებას მისცემს მასწავლებლებს არა მხოლოდ ამოიცნონ, არამედ **პრევენცია** გაუკეთონ ძირითად შეცდომებს სწავლების პროცესში.

დიფერენცირებული მიდგომები გაყოფის სწავლებაში

დიფერენცირება ხდება სამი ძირითადი პარამეტრით: **შინაარსი** (რას ვასწავლით), **პროცესი** (როგორ ვასწავლით) და **შედეგი** (როგორ აჩვენებს მოსწავლე ცოდნას).

1. დიფერენცირება სირთულეების მქონე მოსწავლეებისთვის (საჭიროებს მხარდაჭერას)

ეს მოსწავლეები, როგორც წესი, იბნევიან აბსტრაქტულ სიმბოლოებში და სჭირდებათ მეტი დრო კონცეპტუალურ გაგებაზე.

სფერო	სტრატეგია/აქტივობა	აქცენტი
შინაარსი	**რიცხვების გამარტივება**	დაიწყეთ გაყოფა 2-ზე, 5-ზე და 10-ზე. გამოიყენეთ მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც **უმცირესი გამრავლების ფაქტებით** არის წარმოდგენილი.
პროცესი	**მანიპულატივები (Concrete)**	**გამოიყენეთ ფიზიკური საგნები** გაცილებით დიდხანს. არ გადახვიდეთ აბსტრაქტულ ჩანაწერებზე, სანამ მოსწავლეს არ შეუძლია ჟეტონებით ან კუბებით სწორად გაყოფა.
	ვიზუალური დახმარება	გამოიყენეთ **ბადეები** ან **მასივის მოდელი** გაყოფის ამოხსნისას. მიეცით მზა წრეები ჯგუფების დახატვისთვის.
შედეგი	**ალტერნატიული შეფასება**	ნუ მოსთხოვთ გრძელი გაყოფის ალგორითმის დაწერას. სთხოვეთ, **დახატოს** ამოცანის ამოხსნა ან **ახსნას სიტყვებით** როგორ გაანაწილა რიცხვები.

2. დიფერენცირება საშუალო მზაობის მოსწავლეებისთვის (სტანდარტული მიდგომა)

ეს არის მოსწავლეთა უმრავლესობა, რომლებიც მუშაობენ ეროვნული სასწავლო გეგმის მოთხოვნების ფარგლებში.

სფერო	სტრატეგია/აქტივობა	აქცენტი
შინაარსი	**ორივე მოდელი**	ფოკუსირება გაყოფის **ორივე ინტერპრეტაციაზე** (დანაწილება და განმეორებითი გამოკლება).
პროცესი	**გაყოფის კავშირი**	ინტენსიურად იმუშავეთ **რიცხვების ოჯახთან** და გამრავლების ფაქტებთან. გამოიყენეთ ამოცანები, რომლებიც მოითხოვს შებრუნებული ოპერაციის გამოყენებას.
შედეგი	**სტანდარტული ამოცანები**	ამოცანები, რომლებიც მოითხოვს **ნაშთიანი გაყოფის** სწორად ამოხსნას და ამ ნაშთის სწორად დაწერას სიმბოლურად.

3. დიფერენცირება მაღალი მზაობის მქონე მოსწავლეებისთვის (გამოწვევა)

ამ მოსწავლეებს სჭირდებათ მასალის გაღრმავება და უფრო მაღალი დონის აზროვნების სტიმულირება.

სფერო	სტრატეგია/აქტივობა	აქცენტი
შინაარსი	**მრავალსაფეხურიანი ამოცანები**	მიეცით სიტყვიერი ამოცანები, სადაც გაყოფამდე ან გაყოფის შემდეგ საჭიროა **დამატებითი ოპერაციის** (მიმატება, გამოკლება, გამრავლება) შესრულება.
პროცესი	**გაყოფა 10-ზე, 100-ზე**	შემოიტანეთ **გაყოფა ნულების მქონე რიცხვებზე** (მაგ., 400÷20) და სთხოვეთ, იპოვონ კანონზომიერება.
შედეგი	**პრობლემის შექმნა**	სთხოვეთ მოსწავლეებს, თავად **შეადგინონ სიტყვიერი ამოცანები** მოცემული რიცხვებით (მაგ., 32, 6, 5 ნაშთი 2), სადაც

სფერო	სტრატეგია/აქტივობა	აქცენტი
		ნაშთი საჭიროებს სხვადასხვაგვარ ინტერპრეტაციას.

ამ სტრატეგიების გამოყენებით, თქვენი მეთოდური მასალა მასწავლებლებს მისცემს მკაფიო გზამკვლევს, თუ როგორ უზრუნველყონ, რომ ყველა მოსწავლემ, განურჩევლად მათი სასწავლო ტემპისა და შესაძლებლობებისა, წარმატებით შეისწავლოს გაყოფა.